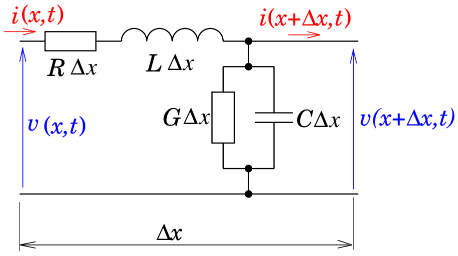
分布定数回路の基本方程式

以下に分布定数回路の基本方程式の導出過程を示す.

1. 回路要素



上図において, 単位長あたりの抵抗分 R, 単位長あたりのインダクタンス L, 単位長あたりのキャパシタンス C, 単位長あたりのコンダクタンス G として, 各部の電圧と電流を考える.

2. 各部の電圧と電流

抵抗 $R\Delta x$ の両端電圧は $(R\Delta x)i(x,t)$. インダクタンス $L\Delta x$ の両端電圧は $(L\Delta x)\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$. コンダクタンス $G\Delta x$ に流れる電流は $(G\Delta x)v(x+\Delta x,t)$. キャパシタンス $C\Delta x$ に流れる電流は $Q = Cv(x+\Delta x,t)$ より, $i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = (C\Delta x)\frac{\partial v(x+\Delta x,t)}{\partial t}$.

3. 波動の基本方程式

以上のことから, キルヒホッフの法則より, 次式が成立する.

$$\begin{aligned} v(x,t) - v(x+\Delta x,t) &= (R\Delta x)i(x,t) + (L\Delta x)\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\ i(x,t) - i(x+\Delta x,t) &= (G\Delta x)v(x+\Delta x,t) + (C\Delta x)\frac{\partial v(x+\Delta x,t)}{\partial t} \end{aligned}$$

これらの式より, 下式となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x,t) - v(x,t)}{\Delta x} && (1) \\ &= -Ri(x,t) - L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} && (2) \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{i(x+\Delta x,t) - i(x,t)}{\Delta x} && (3) \\ &= -Gv(x,t) - C\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} && (4) \end{aligned}$$

4. $v(x,t), i(x,t)$ に正弦波を仮定

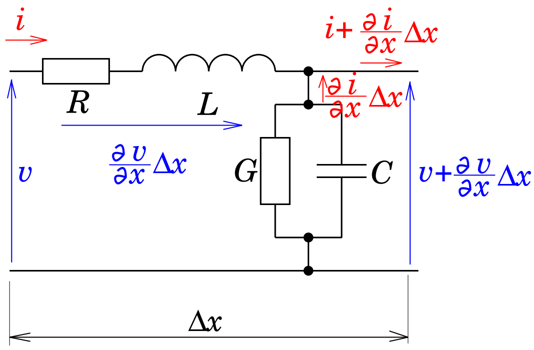
   $v(x,t) \to \dot{V}(x)$, $i(x,t) \to \dot{I}(x)$, $\frac{\partial}{\partial t} \to j\omega$ と形式的にかけるので, 上式は次のようになる.

$$-\frac{\mathrm{d}\dot{V}(x)}{\mathrm{d}x} = R\dot{I}(x) + j\omega L\dot{I}(x) \tag{5}$$

$$-\frac{\mathrm{d}\dot{I}(x)}{\mathrm{d}x} = G\dot{V}(x) + j\omega C\dot{V}(x) \tag{6}$$

以上.

(補足) 次のように考えてもよい.



上図において, Δx 間での電圧と電流の変化分を考えると,

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = -R\Delta x\, i - L\Delta x\frac{\partial i}{\partial t} \tag{7}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x = -G\Delta x\, v - C\Delta x\frac{\partial v}{\partial t} \tag{8}$$

であるから,

$$-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = Ri(x,t) + L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \tag{9}$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = Gv(x,t) + C\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \tag{10}$$

となる. これらは式 (2),(4) と同じである. 以下, 先の場合と同様にして式 (5)(6) を得る.