分布定数回路の等価四端子定数回路 (補足)

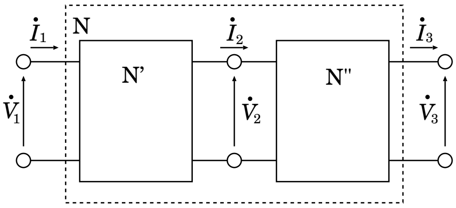
山本健一

2007 年 1 月 25 日

1　対称

対称回路の場合に $A = D$ となることを示す．

四端子回路 N は，2 つの四端子回路 N', N" が縦続接続されているとする．ただし，N' と N" は入力と出力を入れ換えただけの回路であり，N は対称回路であることを想定している．



回路 N の F パラメータを $\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{bmatrix}$, 回路 N' の F パラメータを $\begin{bmatrix} \mathrm{A'} & \mathrm{B'} \\ \mathrm{C'} & \mathrm{D'} \end{bmatrix}$, とする．ここで, N' と N" は入出力を入れ換えただけの回路であることに注意すると次の式が成立する．

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_3 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_3 \\ -\dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

式 (3) より, $A'D' - B'C' \neq 0$ であれば[1]

[1] 相反の章で述べるが, 回路 N が抵抗, キャパシタ, インダクタ, コンダクタンスのみから構成されていれば (授業であつかっている分布定数回路はまさにこの場合に適合する), $A'D' - B'C' = 1$ となる．なお, $A'D' - B'C' = 0$ となる場合については省略する．

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ -\dot{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{A'D'-B'C'} \begin{bmatrix} D' & -B' \\ -C' & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_3 \\ -\dot{I}_3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{A'D'-B'C'} \begin{bmatrix} D' & B' \\ C' & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_3 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

式 (1)(2)(5) より

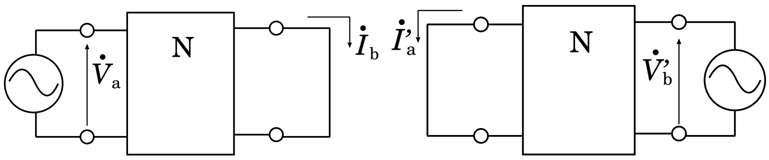
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \frac{1}{A'D'-B'C'} \begin{bmatrix} D' & B' \\ C' & A' \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{A'D'-B'C'} \begin{bmatrix} A'D'+B'C' & 2A'B' \\ 2C'D' & A'D'+B'C' \end{bmatrix} \tag{7}$$

よって, $A = D$.

2 相反 (可逆)

四端子定数回路 N について, 図のような 2 種類の接続をしたときの電圧と電流について考える.



四端子定数回路 N が抵抗, キャパシタ, インダクタンスのみから構成されるとき,

$$\dot{V}_a \dot{I}'_a = \dot{V}'_b \dot{I}_b \tag{8}$$

が成立する. 特に, $\dot{V}_a = \dot{V}'_b$ のとき $\dot{I}'_a = \dot{I}_b$. これらを相反定理 (可逆定理)[2]という.

ここでは相反定理が成立するとき $AD - BC = 1$ となることを示す.

1. 接続 1 のときを考える: F パラメータの定義より

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

[2]一般の線形回路網における相反定理は, 次のとおりである.「各閉路に電源電圧 $\dot{V}_1, \dot{V}_2, \ldots, \dot{V}_n$ があるとき, 各閉路の電流が $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \ldots, \dot{I}_n$ である. 一方, 同一の回路において, 先の電源電圧が $\dot{V}'_1, \dot{V}'_2, \ldots, \dot{V}'_n$ となったときに, 各閉路の電流が $\dot{I}'_1, \dot{I}'_2, \ldots, \dot{I}'_n$ であれば,

$$\dot{V}_1 \dot{I}'_1 + \dot{V}_2 \dot{I}'_2 + \ldots + \dot{V}_n \dot{I}'_n = \dot{V}'_1 \dot{I}_1 + \dot{V}'_2 \dot{I}_2 + \ldots + \dot{V}'_n \dot{I}_n$$

が成立する.」

よって, このときの $\dot{V}_1$ と $\dot{I}_2$ の関係は,

$$\dot{V}_1 = B\dot{I}_2 \tag{10}$$

となる. すなわち

$$\dot{V}_a = B\dot{I}_b \tag{11}$$

2. 接続 2 のときを考える: F パラメータの定義より

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{I}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}'_2 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} \tag{12}$$

このときの $\dot{I}'_1$ と $\dot{E}'_2$ の関係は, $AD - BC \neq 0$ とすると,

$$\dot{V}_2 = \frac{B}{AD - BC}(-\dot{I}'_1) \tag{13}$$

となり, 電流の方向に注意して,

$$\dot{V}'_b = \frac{B}{AD - BC}(\dot{I}'_a) \tag{14}$$

となる.

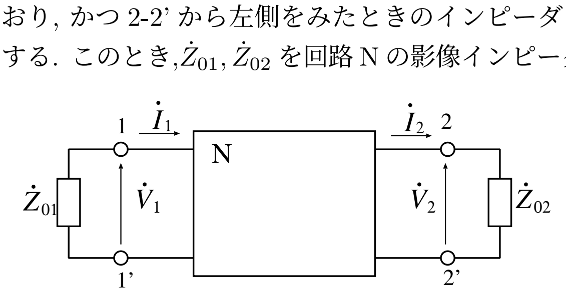
3. 式 (11), (14) より,

$$\frac{\dot{V}'_b}{\dot{V}_a} = \frac{1}{AD - BC}\frac{\dot{I}_a}{\dot{I}'_b} \tag{15}$$

4. 以上より相反定理が成立するとき, $AD - BC = 1$.

3 影像インピーダンス

図のように回路 N の 1-1' 間に $\dot{Z}_{01}$, 2-2' 間に $\dot{Z}_{02}$ のインピーダンスを接続したときを考える. このとき, 1-1' から右側をみたときのインピーダンスが $\dot{Z}_{01}$ となっており, かつ 2-2' から左側をみたときのインピーダンスが $\dot{Z}_{02}$ となっていたとする. このとき,$\dot{Z}_{01}, \dot{Z}_{02}$ を回路 N の影像インピーダンスと呼ぶ.



分布定数線路における影像インピーダンスを求める．F パラメータの定義より,

$$\dot{V}_1 = A\dot{V}_2 + B\dot{I}_2 \tag{16}$$
$$\dot{I}_1 = C\dot{V}_2 + D\dot{I}_2 \tag{17}$$

また, $\dot{Z}_{01}, \dot{Z}_{02}$ が 1-1', 2-2' 端子間にそれぞれ接続されているので,

$$\dot{Z}_{01} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} \tag{18}$$
$$= \frac{A\dot{V}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{V}_2 + D\dot{I}_2} \tag{19}$$
$$= \frac{A\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} + B}{C\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} + D} \tag{20}$$
$$\dot{Z}_{02} = \frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} \tag{21}$$

(20),(21) より,

$$\dot{Z}_{01}\dot{Z}_{02}C + \dot{Z}_{01}D = \dot{Z}_{02}A + B \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \tag{23}$$

ここで $AD - BC \neq 0$ とすると[3],

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{AD - BC} \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} \tag{24}$$
$$= \frac{1}{AD - BC} \begin{bmatrix} D\dot{V}_1 - B\dot{I}_1 \\ -C\dot{V}_1 + A\dot{I}_1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

ここで, 2-2' から左側をみたインピーダンスは

$$\dot{Z}_{02} = \frac{\dot{V}_2}{-\dot{I}_2} \tag{26}$$
$$= \frac{D\dot{V}_1 - B\dot{I}_1}{-(-C\dot{V}_1 + A\dot{I}_1)} \tag{27}$$
$$= \frac{D\frac{\dot{V}_1}{-\dot{I}_1} + B}{C\frac{\dot{V}_1}{-\dot{I}_1} + A} \tag{28}$$
$$= \frac{D\dot{Z}_{01} + B}{C\dot{Z}_{01} + A} \tag{29}$$

[3]授業でとりあつかっている分布定数回路は相反であるから,$AD - BC = 1$.

(式 (29) では, 1-1' 端子に $\dot{Z}_{01}$ が接続されていることから, $\dot{Z}_{01} = \frac{V1}{-\dot{I}_1}$ の条件があり, それを利用した)

$$\dot{Z}_{01}\dot{Z}_{02}C + \dot{Z}_{02}A = \dot{Z}_{01}D + B \tag{30}$$

式 (22)(30) より, $\dot{Z}_{01}\dot{Z}_{02} = \frac{B}{C}$, $\frac{\dot{Z}_{01}}{\dot{Z}_{02}} = \frac{A}{D}$ となり, さらに

$$\dot{Z}_{01} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} \tag{31}$$

$$\dot{Z}_{02} = \sqrt{\frac{BD}{AC}} \tag{32}$$

ここで, $A = D = \cosh\dot{\gamma}\ell$, $B = \dot{Z}_0 \sinh\dot{\gamma}\ell$, $C = \frac{1}{\dot{Z}_0}\sinh\dot{\gamma}\ell$ を利用して

$$\dot{Z}_{01} = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{\frac{\dot{Z}_0 \sinh\dot{\gamma}\ell}{\frac{1}{\dot{Z}_0}\sinh\dot{\gamma}\ell}} = \dot{Z}_0 \tag{33}$$

$$\dot{Z}_{02} = \sqrt{\frac{B}{C}} = \dot{Z}_0 \tag{34}$$

4 伝達定数

F パラメータの定義, 伝搬定数の定義より,

$$\dot{V}_1 = A\dot{V}_2 + B\dot{I}_2 \tag{35}$$

$$e^{\dot{\theta}} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
&= A + B\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2} \\
&= A + B\sqrt{\frac{C}{B}} \\
&= A + \sqrt{BC} \\
&= \cosh\dot{\gamma}\ell + \sqrt{\sinh^2\dot{\gamma}\ell} \\
&= \cosh\dot{\gamma}\ell + \sinh\dot{\gamma}\ell
\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{\dot{\gamma}\ell} + e^{-\dot{\gamma}\ell} + e^{\dot{\gamma}\ell} - e^{-\dot{\gamma}\ell}}{2} \tag{37}$$

$$= e^{\dot{\gamma}\ell} \tag{38}$$

よって, $\dot{\theta} = \dot{\gamma}\ell$