第８日目のまとめ ベクトル空間

山本健一

http://mag.eee.u-ryukyu.ac.jp/linalg/

ベクトル

- $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$
- $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$
- $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
- $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$
- $s(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = s\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b}$
- $(s + t)\boldsymbol{a} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{a}$
- $(st)\boldsymbol{a} = s(t\boldsymbol{a})$
- $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

以上の公理を満足するもの

ベクトル空間

ベクトル空間
ベクトルの集合で，零ベクトル $(\mathbf{0})$，和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，スカラ倍 $(s\boldsymbol{a})$ が定義され，ベクトルの公理を満足するもの。

- **一次結合**
  $s_1\boldsymbol{a}_1 + s_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + s_n\boldsymbol{a}_n$
  をベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_n$ の一次結合という。
- 「**一次従属**」
  ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ について
  少なくともどれか１つのベクトルが残りのベクトルの
  一次結合となっている。
- 「**一次独立**」
  ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ について
  どのベクトルも残りのベクトルの 一次結合となっていない。

部分空間

n 次元ベクトル空間 (V^n) の部分集合 $W (W \subseteq V^n)$ が, 次の条件を同時に満たす時, W を V の**部分 (ベクトル) 空間**という。

- $\boldsymbol{a} \in W, \boldsymbol{b} \in W \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$
- $\boldsymbol{a} \in W \Rightarrow s\boldsymbol{a} \in W \quad (s$:スカラ$)$

(例) 数ベクトル空間 R^n において, 一次同次方程式 $Ax = 0$ の解の全体 $W = \{x \in R^n | Ax = 0\}$ は, R^n の部分空間であり, $Ax = 0$ の**解空間**という。

有限個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が与えられたとき, それらの一次結合全体は一つの $\boxed{\text{部分空間}}$ をつくる.

$$\Downarrow$$

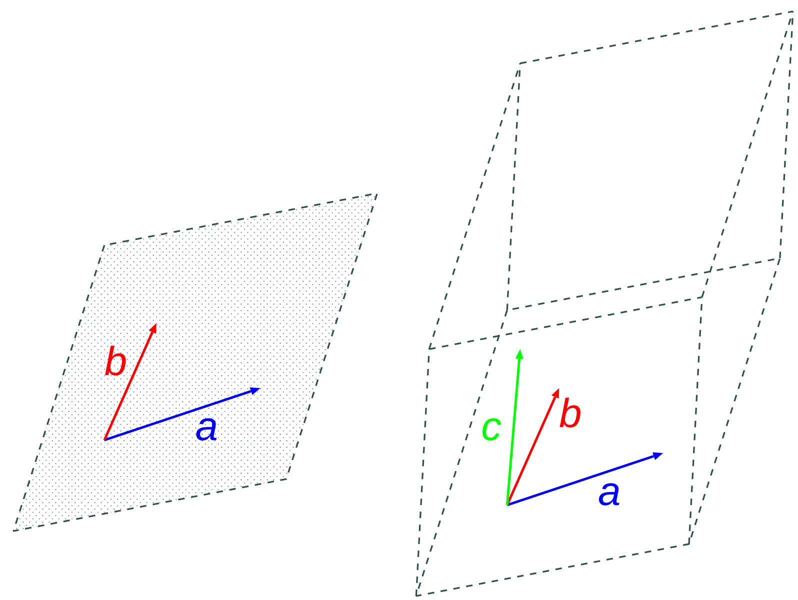
「$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ によって**生成される** (張られる) 部分空間」という.

次元

次元 $\dim W = r$

部分空間 W の中に r 個の一次独立なベクトルが存在し, しかも $(r+1)$ 個以上の一次独立なベクトルが存在しないとき, W は r 次元であるといい, $\dim W = r$ とか W^r であらわす.

- V^n には n 個の一次独立なベクトルが存在するから, V^n の次元は n.
- $\{0\}$ の次元は 0.



基底

部分空間 $W(\dim(W) = r)$ の基底: 次の条件を同時に満たす (順番のついた) ベクトルの列 $< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r >$

- W の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \in W$) は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ で生成される.
  $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots c_r\boldsymbol{a}_r$
- $\boldsymbol{x}$ が決まれば, 上式の $c_1, \cdots, c_r$ は一意に決まる ($\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ は一次独立).

$\{\boldsymbol{a}_1, \cdots \boldsymbol{a}_p\}(p < r)$ が r 次元の部分空間 W に含まれる一次独立なベクトルならば, この $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots \boldsymbol{a}_p\}$ の他に $r - p$ 個の適当なベクトルを付け加えて W の基底とすることができる.