第６日目のまとめ
行列式の性質

山本健一

http://mag.eee.u-ryukyu.ac.jp/linalg/

基本性質 1

定義より明白なもの

- ある行 (列) を s 倍すると, 行列式の値も s 倍となる。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & sa_{13} \\ a_{21} & a_{22} & sa_{23} \\ a_{22} & a_{32} & sa_{33} \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{22} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- ある行 (列) が 2 つのベクトルの和になっている行列式は, それぞれのベクトルをその行 (列) とする 2 つの行列式の和となる。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + b_1' & c_1 \\ a_2 & b_2 + b_2' & c_2 \\ a_3 & b_3 + b_3' & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1' & c_1 \\ a_2 & b_2' & c_2 \\ a_3 & b_3' & c_3 \end{vmatrix}$$

- 2 つの行 (列) を入れ替えると, 行列式は符号だけ変わる.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

基本性質 2

- 2 つの行 (列) が一致すれば, 行列式の値は 0 である.
- $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$
- ある列の s 倍を他の行 (列) に加えても行列式は不変.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + sa_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + sa_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + sa_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

- 行列の転置 (A', ${}^tA$, A^t) 前後で行列式は変わらない
  $|A| = |A'|$ (注意：必ずしも $A = A'$ ではない)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- $|AB| = |A||B|$

余因子展開

$n \times n$ 行列 A の行列式は余因子を使って書ける.

- $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$
- $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(i, j) 余因子 A_{ij} の定義.

$A_{ij} = (-1)^{i+j}$ (行列 A の i 行と j 列を抜いた $n-1 \times n-1$ 行列の行列式)

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$\Leftarrow$ 第 i 行を取り去る.

$\Uparrow$

第 j 列を取り去る

大きいサイズの行列式を求める

- 定義から求める
- 行列式の性質を使って求める
  - ある行 (列) を s 倍して別の行 (列) に足す.
  - ２つの行 (列) を入れ替えると符号が変わる.
  - 余因子展開して, 次数を下げる.
  - 次数を下げる公式を使う.

$$\begin{vmatrix} \boxed{\text{あ}} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\text{い}} \\ a_{i1} \quad \cdots & a_{ij} & \cdots \quad a_{in} \\ \boxed{\text{う}} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\text{え}} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} \boxed{\text{あ}} & \boxed{\text{い}} \\ \boxed{\text{う}} & \boxed{\text{え}} \end{vmatrix} = a_{ij} A_{ij} \text{ など}$$

  - 三角行列の行列式は, 対角要素の積. $\begin{vmatrix} a & & \cdots & \\ & b & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & & \ddots & \vdots \\ & & & z \end{vmatrix} = ab \cdots z$