
第5日目のまとめ 行列式(その壺)

山本健一

<http://mag.eee.u-ryukyu.ac.jp/linarg/>

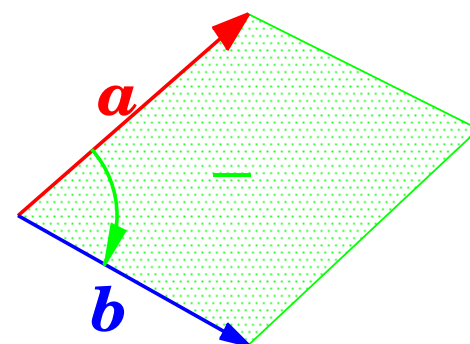
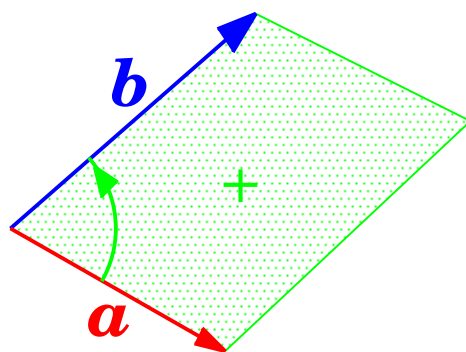
2行2列

2つのベクトルの張る面積 (符号付き).

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \text{ について求める.}$$

$$(\begin{bmatrix} \mathbf{a}, \mathbf{b} \end{bmatrix} \text{ の行列式}) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}, \mathbf{b} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$



3行3列

3つのベクトルの張る体積 (符号付き).

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \text{ について求める.}$$

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \end{bmatrix} \text{ の行列式} \right) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

サラスの展開

- 2行2列

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

- 3行3列

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

- 4行4列以上の大きさの行列には使えない

n行n列

定義 (i, j) 成分が a_{ij} の n 次正方行列 A の行列式:

$$\sum_{i_1 \dots i_n} \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$$

ここで,

- i_1, i_2, \dots, i_n は, $(1, 2, \dots, n)$ のいずれかで, 互いに重複しない。
- $\operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ は, 符号を表す。 (i_1, i_2, \dots, i_n) を入れ替えて, $(1, 2, \dots, n)$ となるまでの回数が
 - 偶数 $(0, 2, 4, 6, \dots)$ の時 \implies プラス (+)
 - 奇数 $(1, 3, 5, 7, \dots)$ の時 \implies マイナス (-)

行列式の定義から求める

- 2行2列 ($2! = 2$ 個の項ができる.)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{22} + \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 3行3列 ($3! = 6$ 個の項ができる.)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} a_{11}a_{23}a_{32} + \\ & \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} a_{12}a_{21}a_{33} + \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} a_{12}a_{23}a_{31} + \\ & \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} a_{13}a_{21}a_{32} + \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} a_{13}a_{22}a_{31} \\ & = a_{11}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

- 4行4列 ($4! = 24$ 個の項ができる.)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

自分でやってみてね。