第４日目のまとめ
逆行列(その壱)

山本健一

http://mag.eee.u-ryukyu.ac.jp/linalg/

正則行列

行列 A について,
$AX = XA = E$ **となる行列 X が存在するとき：**

- **「行列 A は正則である」という。**
- **行列 X を行列 A の逆行列といい, A^{-1} と書く。**
- **正則行列について, $AX = XA = E$ を満たす行列 A^{-1} は, ただ一つしかない**

$\mathrm{rank}(A) \neq \mathrm{rank}(E)$ **のとき, 逆行列は存在しない。**

逆行列の性質

- $A^{-1}A = AA^{-1} = E$**(単位行列)**
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ **[積の順番に注意]**

逆行列の求め方(掃き出し法)

2	-3	4	1	0	0		①
2	-4	5	0	1	0		②
-1	1	-2	0	0	1		③
2	-3	4	1	0	0		①
0	-1	1	-1	1	0	② − ①	②′
0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	③ + ① × $(\frac{1}{2})$	③′
2	0	1	4	-3	0	① + ②′ × (-3)	①′
0	1	-1	1	-1	0	② × (-1)	②″
0	1	0	-1	0	-2	③′ × (-2)	③″
2	0	1	4	-3	0		①′
0	1	-1	1	-1	0		②″
0	0	1	-2	1	-2	②′ + ③″	③‴
2	0	0	6	-4	2	①′ + ③‴ × (-1)	①‴
0	1	0	-1	0	-2	②′ × (-1)	②″
0	0	1	-2	1	-2		③‴
1	0	0	3	-2	1	①″ × $(\frac{1}{2})$	①‴
0	1	0	-1	0	-2		②‴
0	0	1	-2	1	-2		③‴

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$ **を確認**

基本行列とその働き

- **単位行列の i 行目を s 倍した行列.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} & sa_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

(i 行目を s 倍する.)

- **単位行列の i 行目に j 行目の s 倍を加えた行列.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}+sa_{41} & a_{22}+sa_{42} & a_{23}+sa_{43} & a_{24}+sa_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

(i 行目に j 行目を s 倍して加える.)

- **単位行列の i 行目と j 行列目を入れ替えた行列.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

(i 行目と j 行目を入れ替える.)

正則行列と基本行列

- **基本行列は正則である.**
- **基本行列の逆行列は, 同じ型の基本行列となる.**
- **行列が正則ならば, 基本行列の積で書き表すことができる.**

(例)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$