第3日目のまとめ
連立方程式の解の構造

山本健一

http://mag.eee.u-ryukyu.ac.jp/linalg/

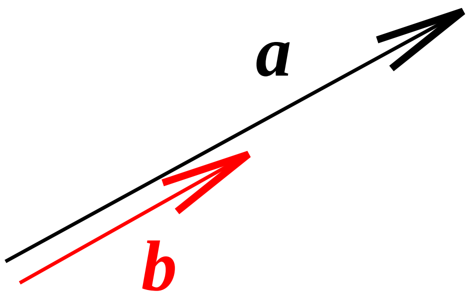
用語

- 一次結合
  ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_k$ について
  $s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3 + \cdots + s_k a_k$ のように
  何倍, 足し算, 引き算の形で書く。
- $s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + s_3\mathbf{a}_3 + \cdots + s_k\mathbf{a}_k = 0$ が成立するときの互いのベクトルの関係
  - 一次独立
    どれか 1 つのベクトルが,
    残りのベクトルの <u>一次結合となっていない</u>。
    $s_1 = s_2 = s_3 = \cdots = s_k = 0$ <u>以外に解はない</u>。
  - 一次従属
    どれか 1 つのベクトルが,
    残りのベクトルの <u>一次結合となっている</u>。
    $s_1 = s_2 = s_3 = \cdots = s_k = 0$ <u>以外に解がある</u>。

一次従属

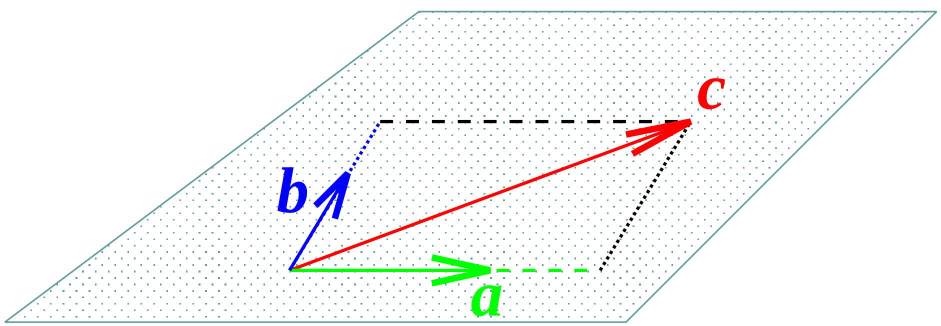
$s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3 + \cdots + s_k a_k = 0$ が成立するとき,
$s_1 = s_2 = s_3 = \cdots = s_k = 0$ 以外に解がある。

- 2 次元ベクトルの場合: $\mathbf{b} = s\mathbf{a}$



同一線 (平行線) 上にある。

- 3 次元 ベクトルの場合: $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$

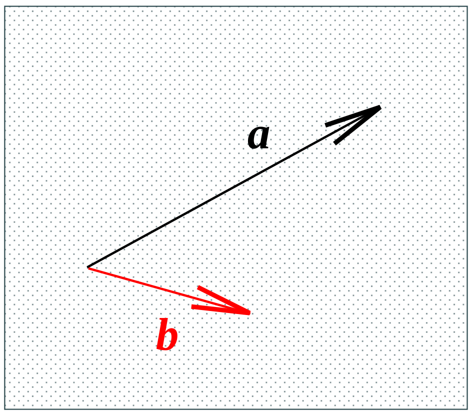


同一面内にある。

一次独立

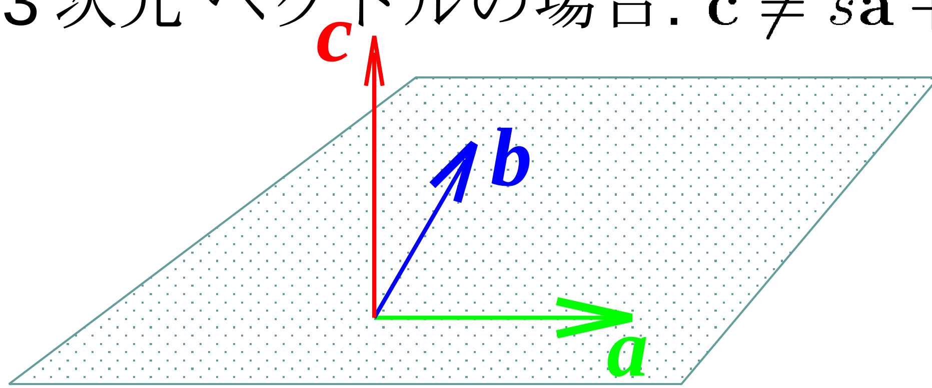
$s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3 + \cdots + s_k a_k = 0$ が成立するとき,
$s_1 = s_2 = s_3 = \cdots = s_k = 0$ 以外に解がない。

- 2 次元ベクトルの場合: $\mathbf{b} \neq s\mathbf{a}$



同一線上にない。

- 3 次元 ベクトルの場合: $\mathbf{c} \neq s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$



同一面内にない。

非同次方程式と同次方程式

連立一次方程式

$$\begin{cases} x+y &= 3 \\ 2x+2y &= 6 \end{cases}$$

$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の一般解

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t+3 \\ t \end{bmatrix}$$

$$= t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

同次方程式の一般解

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ 2x+2y &= 0 \end{cases}$$

$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の一般解

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(非同次方程式 $Ax=b$ の解)

　＝ ($Ax=0$ の一般解) ＋ ($Ax=b$ の特殊解)

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解: $\mathbf{x}$

非同次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解:

- ($A\mathbf{x} = b$ の特殊解: $\mathbf{x}_0$)+($A\mathbf{x} = 0$ の一般解: $\mathbf{x}_*$)
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解は, $A\mathbf{x} = 0$ の解を $\mathbf{x}_0$ だけ平行移動。

(例) $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$