第２日目のまとめ
掃き出し法

山本健一

http://mag.eee.u-ryukyu.ac.jp/linalg/

連立一次方程式の解法

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcr}
2x & + & y & + & z & = & 15 \\
4x & + & 2y & + & 5z & = & 39 \\
8x & + & 8y & + & 9z & = & 83
\end{array}
\right.
$$

2	1	1	15		①
4	2	5	39		②
8	8	9	83		③
2	1	1	15		①
0	0	3	9	② + ① $\times (-2)$	②$'$
0	4	5	23	③ + ① $\times (-4)$	③$'$
2	1	1	15		①
0	4	5	23		③$'$
0	0	3	9		②$'$

2	1	1	15		①
0	4	5	23		③$'$
0	0	1	3	②$'$ $\times \frac{1}{3}$	②$''$
2	1	0	12	① + ②$''$ $\times (-1)$	①$'$
0	4	0	8	③$'$ + ②$''$ $\times -5$	③$''$
0	0	1	3		②$''$
2	1	0	12		①
0	1	0	2	③$''$ $\times \frac{1}{4}$	③$'''$
0	0	1	3		②$''$
1	0	0	5	① + ③$'''$ $\times (-1)$	
0	1	0	2		③$'''$
0	0	1	3		②$''$

掃き出し法(行基本変形)

- 掃き出し法の手順 (行基本変形)
  - ある行を何倍かする。
  - １つの行から他 (の何倍か) を足す
  - ２つの行を入れ替える
- 行列の三角化
  - 掃き出し法 (行基本変形) を適用する。
  - “0” を増やしていく。
  - 係数行列の対角線より下の成分を全て”0” とする。

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ & 6 & 7 & 8 \\ & & 1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{\text{\Huge 0}} & & 3 \end{bmatrix}
$$

- 対角化

階数, ランク

1. 行基本変形を行って, 三角化を試みる。
2. 階数 (ランク) を判定する。
   - 少なくとも１つは"0" ではない要素がある行の個数
   - 行ベクトルのうち, 零ベクトルとならないものの個数

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

連立方程式の解

- **係数行列のランクと拡大係数行列のランクが等しいとき**
  $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}[A|b]$
  $\Longrightarrow$ **解が存在する。**
  - **未知数の数"n" とランクが等しいとき**
    $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}[A|b] = n$
    $\Rightarrow$ **一意の解**
  - **未知数の数"n" とランクが異なるとき**
    $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}[A|b] \neq n$
    $\Rightarrow$ **無数の解 (任意の変数 t, s を使用)**
- **係数行列のランクと拡大係数行列のランクが異なるとき**
  $\mathrm{rank}A \neq \mathrm{rank}[A|b]$
  $\Longrightarrow$ **解は存在しない。**

無数の解が存在する例

2	−4	6	−2		①
3	2	−7	13		②
5	−7	9	1		③
⋮	⋮	⋮	⋮		
1	0	−1	3		①′
0	1	−2	2		②′
0	0	0	0		③′

- **係数行列**: $\mathrm{rank}[A] = 2$
- **拡大係数行列**: $\mathrm{rank}[A|b] = 2$

$$\begin{cases} x - z = 3 \\ y - 2z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t + 2 \\ z = t \end{cases}$$

(t **は任意**)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解が存在しない例

1	3	-2	3		①
2	5	-3	6		②
4	7	-3	1		③
1	3	-2	3		①
0	-1	1	0	② $-\ 2 \times$ ①	②$'$
0	-5	5	-11	③ $-\ 4 \times$ ①	③$'$
1	3	-2	3		①$'$
0	-1	1	0		②$'$
0	0	0	-11	③$' - 5 \times$ ②$'$	③$''$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ -y + z = 0 \\ 0 = -11 \end{cases}$$

解なし

- **係数行列**: $\mathrm{rank}[A] = 2$
- **拡大係数行列**: $\mathrm{rank}[A|b] = 3$

基本行列とその働き

- **単位行列の i 行目を s 倍した行列.**
  $\Longrightarrow$ (i 行目を s 倍する.)

(例) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ sa_{21} & sa_{22} & sa_{23} & sa_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

- **単位行列の i 行目に j 行目の s 倍を加えた行列.**
  $\Longrightarrow$ (i 行目に j 行目を s 倍して加える.)

(例) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}+sa_{41} & a_{22}+sa_{42} & a_{23}+sa_{43} & a_{24}+sa_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

- **単位行列の i 行目と j 行列目を入れ替えた行列.**
  $\Longrightarrow$ (i 行目と j 行目を入れ替える.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$