第13日目のまとめ
行列の対角化

山本健一

http://mag.eee.u-ryukyu.ac.jp/linalg/

正則行列による対角化

n 次正方行列 A について, 次の手順で対角化ができる。

- n 個の異なる固有値 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ を求める。
  (重複根を持つ場合は後述)
- 固有値に対する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ を求める。
- $P = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n]$ をつくる。
- $$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

固有方程式が重解を持つ場合

n 次正方行列 A について,
代数的重複度と幾何学的重複度が同じなら, 対角化可能。

- 固有方程式が $(x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_r)^{n_r}=0$
- 固有ベクトルを求める (代数的重複度 $=$ 幾何学的重複度)
  - 固有値 λ_1 に対応する固有ベクトルを n_1 個
    $\boldsymbol{p}_{11},\boldsymbol{p}_{12},\cdots,\boldsymbol{p}_{1n_1}$
  - 固有値 λ_2 に対応する固有ベクトルが n_2 個
    $\boldsymbol{p}_{21},\boldsymbol{p}_{22},\cdots,\boldsymbol{p}_{2n_2}$
  - 固有値 λ_r に対応する固有ベクトルが n_r 個
    $\boldsymbol{p}_{r1},\boldsymbol{p}_{r2},\cdots,\boldsymbol{p}_{rn_r}$
- $P=[\underbrace{\boldsymbol{p}_{11},\boldsymbol{p}_{12},\cdots,\boldsymbol{p}_{1n_1}}_{n_1\text{ 個}},\cdots,\underbrace{\boldsymbol{p}_{r1},\boldsymbol{p}_{r2},\cdots,\boldsymbol{p}_{rn_r}}_{n_r\text{ 個}}]$

固有方程式が重解を持つ場合

$$P = [\underbrace{\boldsymbol{p}_{11}, \boldsymbol{p}_{12}, \cdots, \boldsymbol{p}_{1n_1}}_{n_1\text{ 個}}, \cdots, \underbrace{\boldsymbol{p}_{r1}, \boldsymbol{p}_{r2}, \cdots, \boldsymbol{p}_{rn_r}}_{n_r\text{ 個}}]$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}}^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overbrace{\begin{matrix} \lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{matrix}}^{n_r} \end{bmatrix}$$

二次形式 1 (2 次式登場)

$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = \frac{3}{2}$ **はどんな形？**
この式は次のように書ける。

$$\boldsymbol{x}' A \boldsymbol{x} = \frac{3}{2}$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + (b+c)x_1x_2 + dx_2^2$$

となるので, $a = 1, b = c = -\frac{1}{2}, d = 1$ **と置いた。**

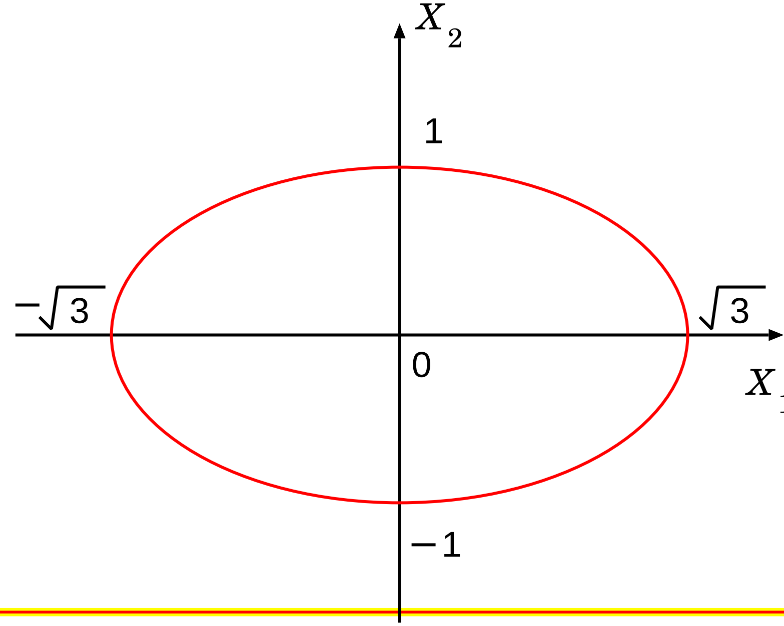
二次形式 2 (対角化)

行列 A を対角化する。

- **固有方程式**: $|A-\lambda E|=0$
- **固有値**: $\lambda=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$
- $\lambda=\frac{1}{2}$ **に対する固有ベクトル** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} s \ (s \neq 0)$
- $\lambda=\frac{3}{2}$ **に対する固有ベクトル** $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t \ (t \neq 0)$
- $P=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ **とおくと**, $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **となる。**
- $|P|=1$

二次形式3 (基底を変えてみる)

- $\boldsymbol{x} = PX$ なる一次変換を考える。
- $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}X_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 \end{bmatrix}$$
- 式 $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = \frac{3}{2}$ に代入する。
- $$\left(\frac{X_1}{\sqrt{3}}\right)^2 + X_2^2 = 1$$ (楕円)

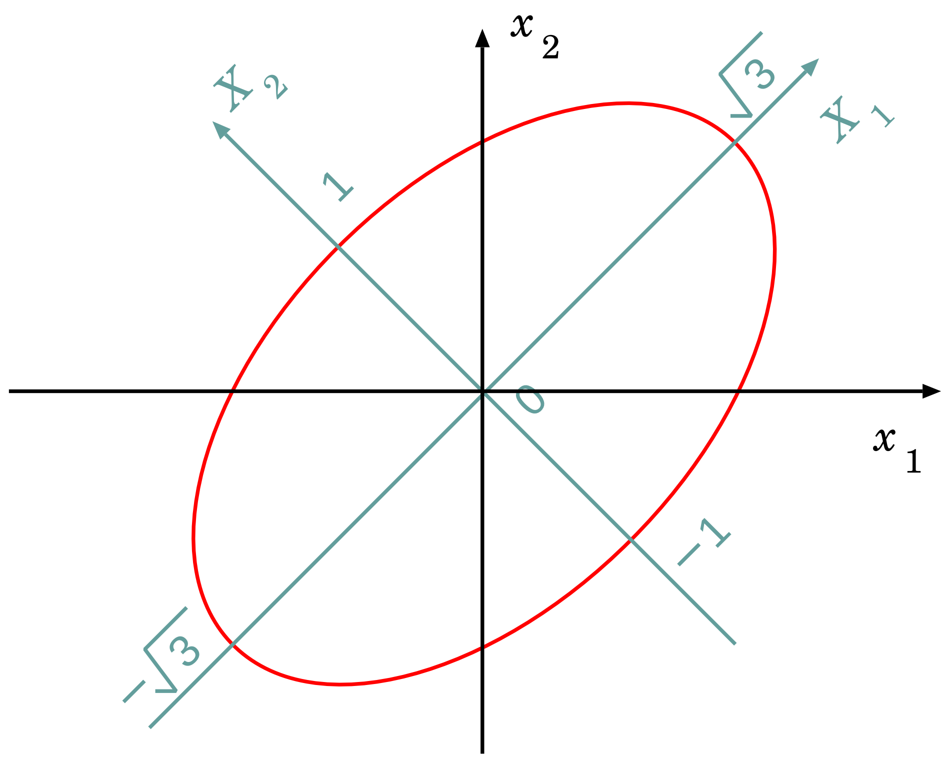


二次形式4 (P の役割)

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$$

P は, 反時計方向に 45^o の回転をあらわす。

以上のことから, $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = \frac{3}{2}$ は下図のような楕円。



連立微分方程式 1

- $$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = y_2 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = -2y_1 + 3y_2 \end{cases}$$
- $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = A\boldsymbol{y}$$
- $$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

連立微分方程式 2

- A を対角化するための準備
  - 固有方程式：$|A-\lambda E|=0$
  - 固有値：$\lambda=1,2$
  - 固有ベクトル：

$$\lambda=1 \text{ に対して } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda=2 \text{ に対して } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

連立微分方程式3

- $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ なる $\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ を導入
- $\dfrac{\mathrm{d}P\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}x} = AP\boldsymbol{z}$
- $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}x} = P^{-1}AP\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$
- $z_1 = c_1 e^x$, $z_2 = c_2 e^{2x}$
- $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^x \\ c_2 e^{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^x + c_2 e^{2x} \\ c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} \end{bmatrix}$