第12日目のまとめ
固有値と固有ベクトル

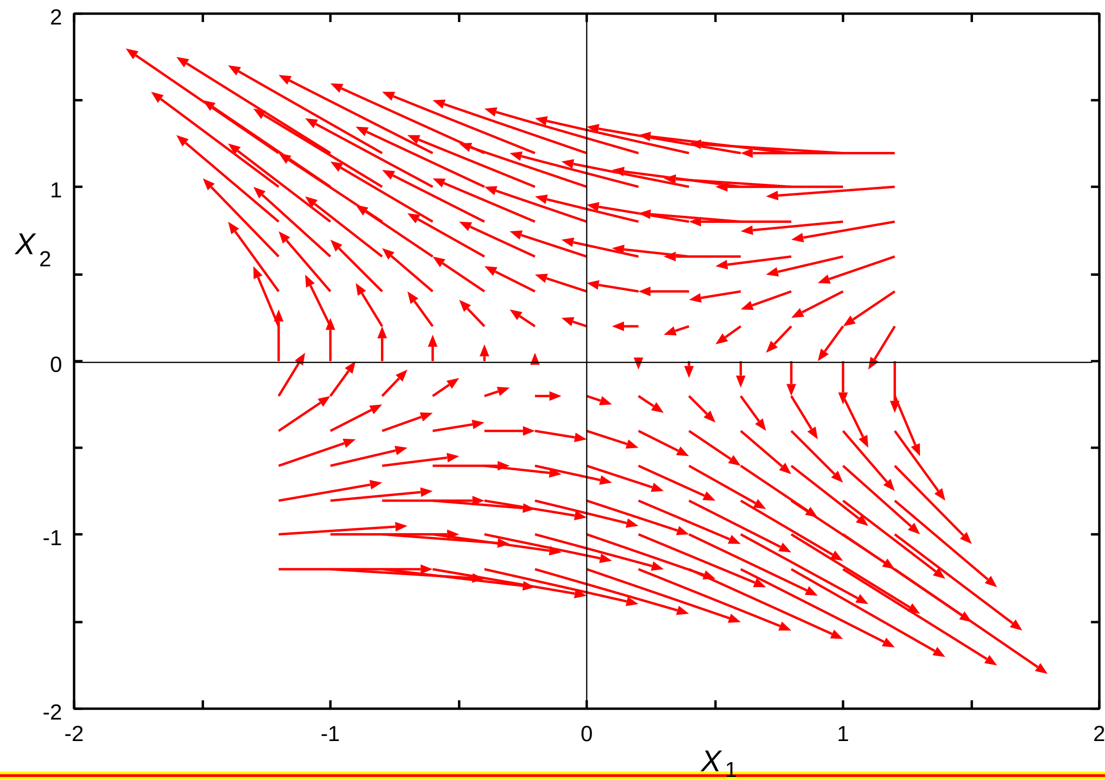
山本健一

http://mag.eee.u-ryukyu.ac.jp/linalg/

線形変換 $F : V \to V$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

点の移動 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$ **を矢印で表示**



固有値

線形変換 $F: V \to V$ **について：**

$$F(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

となる場合を考える。

- **固有方程式**: $|A - \lambda E| = 0$
- **固有値**: **固有方程式を満たす** λ

(例) $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$ **について**

- **固有方程式は** $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4}-\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{8}(2\lambda - 3)(4\lambda - 3) = 0$
- **固有値は** $\lambda = \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$

固有ベクトル

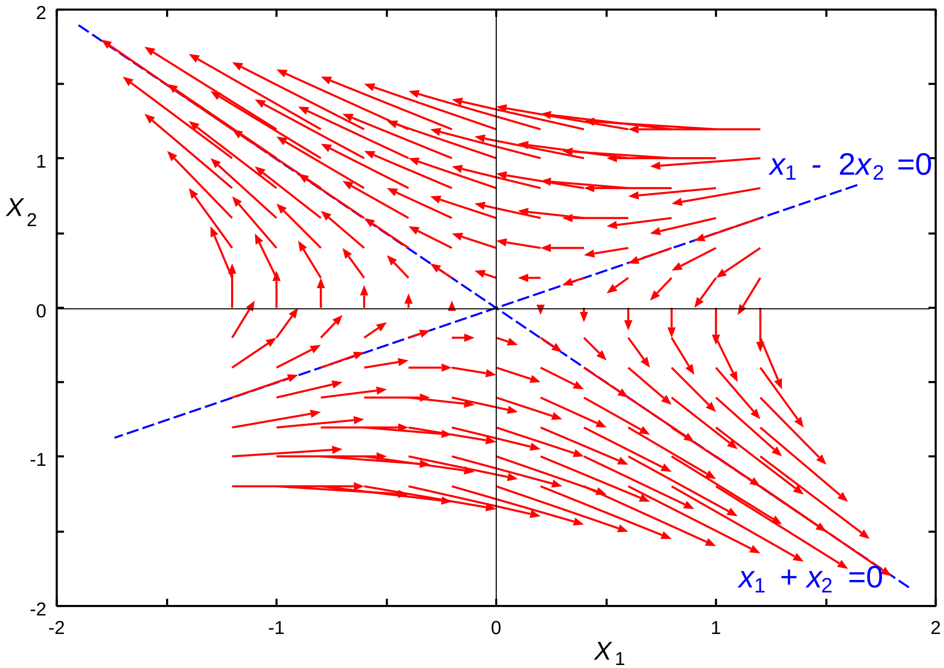
$$Ax = \lambda x$$

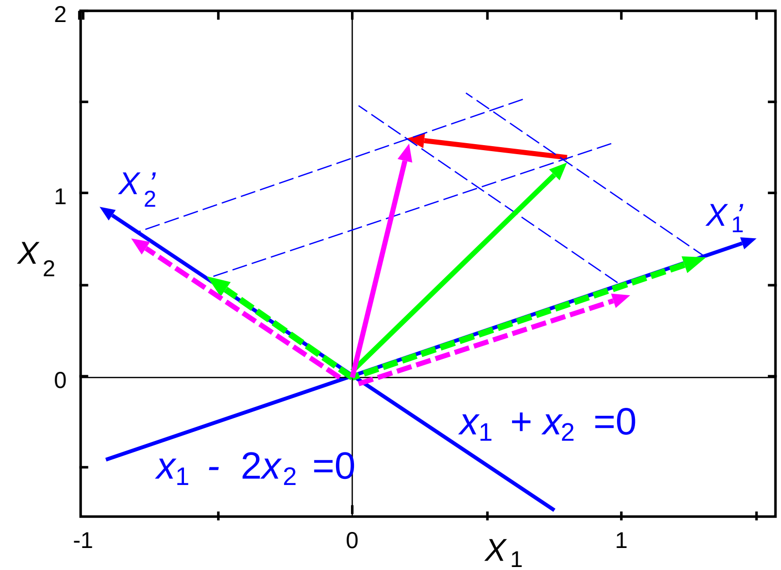
- ベクトル $x(\neq 0)$ と Ax の「方向」が変わらない。
- x は固有値 λ に対する固有ベクトル。

(例) $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$ について,

- $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ に対する固有ベクトルは $x = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (t は 0 以外の任意の数)。
  この x は方向が同じで長さが $\frac{3}{2}$ 倍となる。
- $\lambda_2 = \frac{3}{4}$ に対する固有ベクトルは $x = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (s は 0 以外の任意の数)。
  この x は方向が同じで長さが $\frac{3}{4}$ 倍となる。

幾何学的意味





基底を変えて眺めると…

- $X'_1(\boldsymbol{e}'_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix})$ **成分** $\Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{4}$ **倍**
- $X'_2(\boldsymbol{e}'_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix})$ **成分** $\Rightarrow \lambda_2 = \frac{3}{2}$ **倍**

固有空間

- 固有値 λ に対する固有ベクトル全体 (と 0) は, 一つの部分空間をつくる。これを固有値 λ に対する**固有空間**という。
- n 次の行列 A は重複度までいれて n 個の固有値を持つ。
- 相異なる固有値に対応する固有ベクトルは一次独立。

重複する固有値

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ -1 & 7-\lambda & 1 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2(4-\lambda) = 0$$

- $\lambda = 4$ **の場合**: $\boldsymbol{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **(**t **は** 0 **以外の任意)**

  $\lambda = 4$ **に対する** A **の固有空間の一つの基底：** $\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$

- $\lambda = 5$ **の場合**: $\boldsymbol{x} = u \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **(**u, v **は** 0 **以外の任意)**

  $\lambda = 5$ **に対する** A **の固有空間の一つの基底：** $\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$