第11日目のまとめ

内積空間

山本健一

http://mag.eee.u-ryukyu.ac.jp/linalg/

内積(実ベクトル)

公理

- $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$
- $(s\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
- $\boldsymbol{a} \neq 0$ なら $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) > 0$

ノルム(長さ)・交角

- $||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ をベクトル a のノルム(長さ)
- $||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||$ をベクトル a, b の距離
- $\cos\theta = \dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{b}||}$
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, $||\boldsymbol{a}|| > 0$, $||\boldsymbol{b}|| > 0$ のとき, $a \perp b$(直交)

直交変換(実ベクトル)

線形変換 $T : V \to V$ **において, 次の 4 項目は互いに同値。**

- T **は, 長さを変えない。**
- T **は, 内積を変えない。**
- T **は, 単位ベクトルを単位ベクトルに写す。**
- T **は,** V **の正規直交基底** $< \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n >$ **を正規直交基底** $< T(\boldsymbol{u}_1), T(\boldsymbol{u}_2), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n) >$ **に写す。**

このような線形変換を直交変換という。

$\boxed{U'U = UU' = E}$ **となる行列** U **(直交行列)。**

(例) $$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

複素ベクトル

- 虚数： $i^2 = -1, \sqrt{-1} = i$
- 複素数: $a = a_r + ia_i$,　ここで a_r, a_i は共に実数, i は虚数。
- 複素共役：$\overline{a} = \overline{a_r + ia_i} = a_r - ia_i$
- 複素ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ の内積：

定義 $\boxed{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2} + a_3\overline{b_3}}$

内積(実・複素ベクトル)

- $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}$
- $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$
- $(s\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
- $(\boldsymbol{a}, s\boldsymbol{b}) = \overline{s}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
- $\boldsymbol{a} \neq 0$ なら $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) > 0$

ノルム(長さ)

- $||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ をベクトル $\boldsymbol{a}$ のノルム(長さ)
- $||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||$ をベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の距離
- $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, $||\boldsymbol{a}|| > 0$, $||\boldsymbol{b}|| > 0$ のとき, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$(直交)

複素行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{r11} + ia_{i11} & a_{r12} + ia_{i12} & a_{r13} + ia_{i13} \\ a_{r21} + ia_{i21} & a_{r22} + ia_{i22} & a_{r23} + ia_{i23} \\ a_{r31} + ia_{i31} & a_{r32} + ia_{i32} & a_{r33} + ia_{i33} \end{bmatrix}$$

- **共役行列**

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \overline{a_{13}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \overline{a_{23}} \\ \overline{a_{31}} & \overline{a_{32}} & \overline{a_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{r11} - ia_{i11} & a_{r12} - ia_{i12} & a_{r13} - ia_{i13} \\ a_{r21} - ia_{i21} & a_{r22} - ia_{i22} & a_{r23} - ia_{i23} \\ a_{r31} - ia_{i31} & a_{r32} - ia_{i32} & a_{r33} - ia_{i33} \end{bmatrix}$$

- **転置共役行列, 随伴行列**

$$\overline{A'} = A^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \overline{a_{31}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \overline{a_{32}} \\ \overline{a_{13}} & \overline{a_{23}} & \overline{a_{33}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{r11} - ia_{i11} & a_{r21} - ia_{i21} & a_{r31} - ia_{i31} \\ a_{r12} - ia_{i12} & a_{r22} - ia_{i22} & a_{r32} - ia_{i32} \\ a_{r13} - ia_{i13} & a_{r23} - ia_{i23} & a_{r33} - ia_{i33} \end{bmatrix}$$

- **ユニタリ行列 (直交行列の複素行列版)**

$\boxed{\overline{U'}U = U\overline{U'} = E}$ となる行列 U。

シュミットの直交化法

n 次元ベクトル空間において, 一次独立な n 個の基底 $< \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n >$ から正規直交基底 $< \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n >$ をつくる.

- $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$
- $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1$
- $\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2$
- $\boldsymbol{b}_p = \boldsymbol{a}_p - \sum_{i=1}^{p-1} (\boldsymbol{a}_p, \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_i$

- $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{\boldsymbol{b}_1}{||\boldsymbol{b}_1||}$
- $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{\boldsymbol{b}_2}{||\boldsymbol{b}_2||}$
- $\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{\boldsymbol{b}_3}{||\boldsymbol{b}_3||}$
- $\boldsymbol{u}_p = \dfrac{\boldsymbol{b}_p}{||\boldsymbol{b}_p||}$