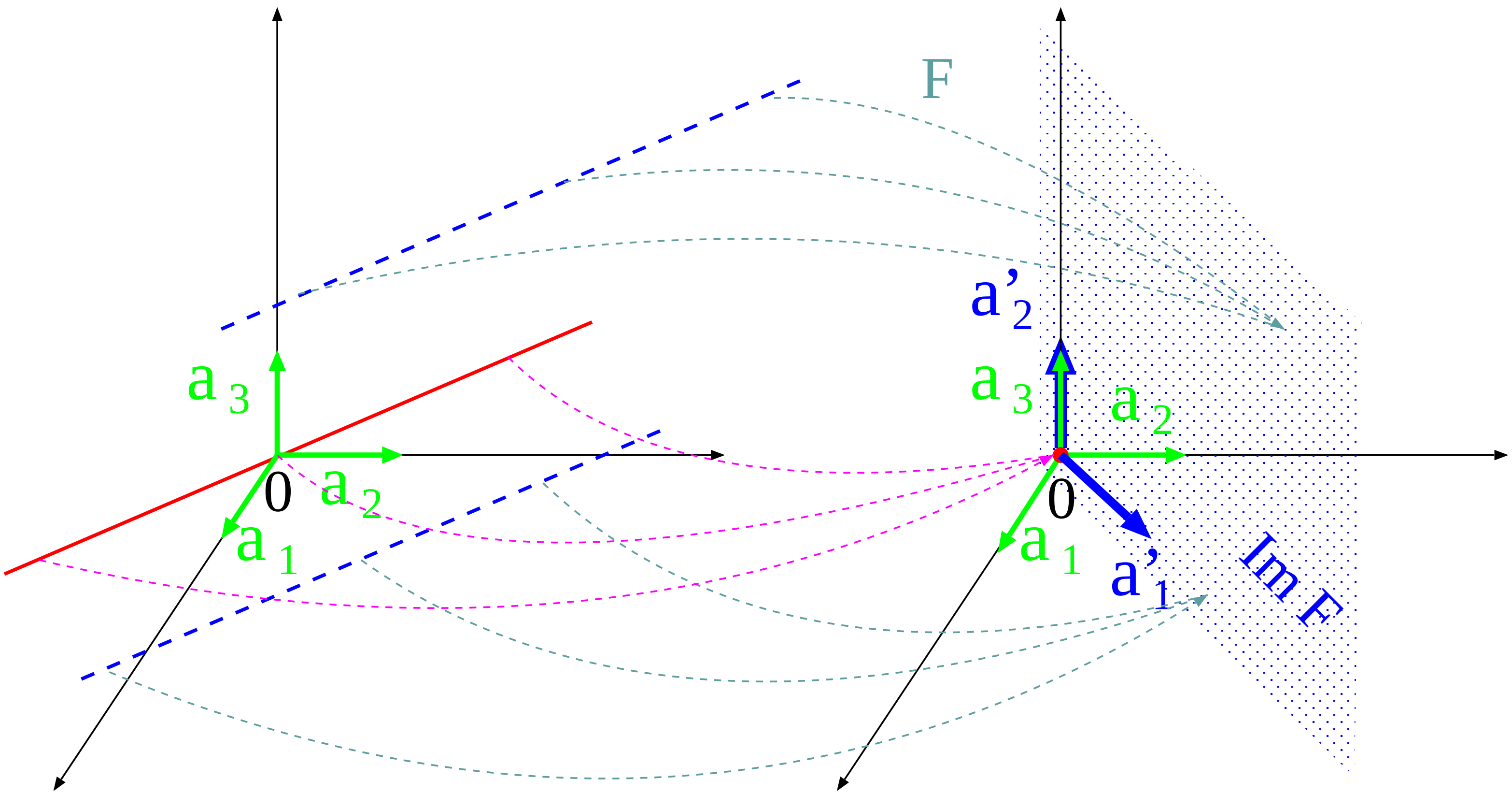
第10日目のまとめ
表現行列, 基底変換

山本健一

http://mag.eee.u-ryukyu.ac.jp/linalg/

線形写像と基底

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+y \\ z \end{bmatrix} = (x+y) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



線形写像前後で，異なる基底を使う．

表現行列

- $< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n >$ を n 次元ベクトル空間 V の基底
- $< \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m >$ を m 次元ベクトル空間 W の基底
- $F : V \to W$ なる線形写像を考える
- V の基底の像は, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m$ をつかって形式的に

$$[F(\boldsymbol{a}_1), F(\boldsymbol{a}_2), \cdots, F(\boldsymbol{a}_n)] = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$ のことを, 基底 $< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n >$, $< \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m >$ に関する線形写像 F の表現行列という.

表現行列と基底

- 基底 $< \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \cdots, \boldsymbol{a}_n >$ に関する $x \in V$ の座標: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

  $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$

- 基底 $< \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_m >$ に関する $\boldsymbol{x}' = F(\boldsymbol{x}) \in W$ の座標: $\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix}$

  $\boldsymbol{x}' = x'_1\boldsymbol{b}_1 + x'_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x'_m\boldsymbol{b}_m$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

基底変換

- n 次元ベクトル空間 V
- 一つの基底 $< \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n >$ をつかって, $x \in V$ は
  $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$ と書ける.
- 新たな基底 $< \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n >$ をつかって,
  $\boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{a}'_1 + \cdots + x'_n\boldsymbol{a}'_n$ とも書ける.
- これらの基底は, **記号的に**

$$[\boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n] = [\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n] \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ & \cdots & \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

- $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ & \cdots & \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$ (成分の変換式)

$\Uparrow$

基底変換の行列, 基底の取り替え行列

基底変換と表現行列

- ベクトル空間 V の基底
  $\mathcal{A}$: $< \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n >$, $\mathcal{A}'$: $< \boldsymbol{a}'_1, \cdots, \boldsymbol{a}'_n >$
- ベクトル空間 W の基底
  $\mathcal{B}$: $< \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_m >$, $\mathcal{B}'$: $< \boldsymbol{b}'_1, \cdots, \boldsymbol{b}'_m >$
- P: 基底変換 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ の行列
- Q: 基底変換 $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ の行列
- A: 線形写像 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に関する表現行列
- B: 線形写像 $\mathcal{A}' \to \mathcal{B}'$ に関する表現行列

$$\boxed{B = Q^{-1}AP}$$

特に, V と W が一致し $P = Q$ の時, $\boxed{B = P^{-1}AP}$

線形代数のクライマックス

適切な基底変換の行列 P を求めて

$$P^{-1}AP$$

による行列の対角化