第１日目のまとめ
ベクトルと行列の基本演算

山本健一

http://mag.eee.u-ryukyu.ac.jp/linalg/

ベクトル

- 書き方：
  行ベクトル 1 $\mathbf{a} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n)$
  行ベクトル 2 $\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n]$
  列ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$
- ベクトルが等しい：$\mathbf{a} = \mathbf{b}$
  1. 2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ が同じ次元 (n) であって,
  2. 対応する全ての成分が一致する。$(i = 1 \dots n,\ a_i = b_i)$

ベクトルの和・差・s倍, 内積

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ のとき,

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}-\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix}, \quad s\mathbf{a} = \begin{bmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ \vdots \\ sa_n \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

ベクトルの計算法則

1. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
2. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ ただし $\mathbf{0}$ は零ベクトル
4. $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b} = \mathbf{a}$
5. $s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s\mathbf{a} + s\mathbf{b}$
6. $(s + t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$
7. $(st)\mathbf{a} = s(t\mathbf{a})$

1. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
2. $(\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c})$
3. $(s\mathbf{a}, \mathbf{b}) = s(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
4. $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{a}) > 0$, $(\mathbf{a}, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{a}) = 0$

行列の書き方

m 行 n 列 $(m \times n)$

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

正方行列：$m = n$ のとき

単位行列

$$
E = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
$$

零行列

$$
O = \begin{bmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0
\end{bmatrix}
$$

行列の和・差

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$ のとき,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \dots & a_{nn} - b_{nn} \end{bmatrix}$$

行列の積： $(k \times m)(m \times n) \Rightarrow (k \times n)$

$(k \times m)(m \times n) \Rightarrow (k \times n)$

$$
\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \end{bmatrix}
$$

$$
c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}
$$

行列の計算法則

1. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
2. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
3. $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$
4. $s(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = s\mathbf{A} + s\mathbf{B}$
5. $(s + t)\mathbf{A} = s\mathbf{A} + t\mathbf{A}$
6. $(st)\mathbf{A} = s(t\mathbf{A})$

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(A + B)C = AC + BC$
4. $A + O = O + A = A$
5. $AB \neq BA$ あるいは, どちらかが計算不能